Untersuchungen

über die

Elasticität dünner Drähte.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde der naturwissenschaftlichen Facultät in Tübingen vorgelegt

von

Andreas Miller,
k. Rector und Lehrer der Mathematik und Physik an der k. Kreisgewerbschule München.

1874.

München.
M. Pössenbacher'sche Buchdruckerei (M. Franz & M. Furtmayr).

Untersuchungen

über die

Elasticität dünner Drähte.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde der naturwissenschaftlichen Facultät in Tübingen vorgelegt

von

Andreas Miller,

k. Rector und Lehrer der Mathematik und Physik an der k. Kreisgewerbschule München.

1874.

München.

M. Pössenbacher'sche Buchdruckerei (M. Franz & M. Furtmayr).

Vorwort.

Vorliegende Abhandlung liefert einerseits einen Beitrag zur Lösung schon behandelter Fragen, anderseits berührt sie Gebiete, welche meines Wissens bisher nicht eingehend studirt wurden.

Es ist bekannt, dass die Grösse der Streckung, welche ein belasteter Draht erfährt, eine Funktion der Zeit ist; ich habe mich bemüht, diese Abhängigkeit wenigstens für Streckungen in der Nähe der s. g. Elasticitätsgrenze zu ermitteln, und daraus auf mathematischem Wege einige Schlüsse abzuleiten.

Von besonderem Interesse dürften die Beobachtungen über den Einfluss der Streckungen auf die Elasticität des Eisens und Kupfers sein, sowie die Versuche, den Vorgang, welcher beim Strecken der Drähte durch Schwingen von an denselben befestigten Massen stattfindet, aufzuhellen.

Weiter studirte ich den Einfluss der Wärme auf die Elasticität und Cohäsion des Eisens zwischen 0° und 100° C. und glaube damit einen Beitrag zu den Arbeiten der Herren ***Kohlrausch*** und ***Loomis*** einerseits, ***Wertheim*** anderseits, durch deren sich widersprechende Resultate die streitige Frage entstanden, ob der Torsionselasticitätsmodul des Eisens eine andere Aenderung durch die Wärme erleidet, als der longitudinale, geliefert zu haben.

Die Versuche wurden mit Ausnahme eines einzigen, bei welchem ich einen Kupferdraht gebrauchte, an Eisendrähten vorgenommen. Der Kupferdraht war ein gewöhnlicher, die Eisendrähte hatte Herr Drahtwaarenfabrikant ***Kaltenecker***

dahier die Güte, mir möglichst gerade zu ziehen, was viele Vortheile beim Experimentiren mit sich bringt.

Die Elasticitätsmodule habe ich nicht angegeben, weil diese zu bestimmen ich mir nicht als Aufgabe stellte, indem sie schon oft untersucht und zu sehr von dem behandelten Materiale abhängen; weil ferner, wenn bei den einzelnen Theilen des angewandten Apparates auch noch so unbedeutende Dehnungen eintreten würden, das Gewicht der gefundenen Zahlen immerhin abgeschwächt wäre, während solche unbedeutende Dehnungen bei den hier behandelten Fragen minder von Belang sind, indem bei derselben Belastung die Dehnung dieselbe bleibt, und es sich hier blos um Aenderungen handelt, dagegen für diese der Apparat sehr empfindlich ist.

Ich habe es desshalb auch unterlassen, bei jedem Drahtstücke die Dichte und Dicke zu bestimmen. Für alle Eisendrähte war ein Durchmesser von 1^{mm} beabsichtiget. Die Dichte des Eisendrahtes fand ich bei irgend einem Stück $= 7{,}439$, woraus sich der Durchmesser $= 0{,}978^{mm}$ berechnete. Die Dichte des Kupfers war $= 8{,}928$.

Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgehen, dass ich, ohne es vorher zu wollen, immer weiter geführt wurde, denn, sagt *W. H. Riehl:* „Das eben ist die wunderbare Wirkung eines in's Einzelne sich versenkenden Studiums, dass uns die Erforschung der Einzelthatsachen immer weiter treibt zum Nachweis ihres Zusammenhanges mit einem immer grösseren, reicheren Ganzen."

München, zu Weihnachten 1872.

Der Verfasser.

§ 1.

Literatur. Die Erscheinungen, welche feste Körper zeigen, wenn sie einem Zug oder Druck unterliegen, sind wegen ihrer Wichtigkeit für die Technik und Wissenschaft schon vielfach Gegenstand von mathematischen und experimentellen Untersuchungen gewesen.

Wird nämlich ein fester Körper einem Zuge unterworfen, so verlängert er sich; hört der Zug auf, so nimmt er entweder seine frühere Länge wieder vollkommen an, oder es verschwindet nur ein Theil der Verlängerung; es entsteht also eine bleibende Verlängerung, Streckung oder Reckung. Somit ist die Wirkung eines Zuges entweder blos vorübergehend, oder theils vorübergehend, theils bleibend.

Die Ausdehnung, welche nach dem Aufhören des Zuges wieder verschwindet, heisst die elastische Ausdehnung im Gegensatze zur Reckung oder Streckung. Aus der Kenntniss der ersteren schliessen wir auf die Elasticität, aus der der letzteren auf die Cohäsion eines Körpers.

Eine grosse Anzahl besonders älterer Experimentaluntersuchungen wurden hauptsächlich der Technik wegen angestellt und desshalb an Körpern von grossen Dimensionen vorgenommen, wobei es vorzüglich galt, die Last zu ermitteln, welche auf die Querschnittseinheit nöthig ist, um den Körper zu zerreissen. Es finden sich die Resultate derartiger Arbeiten in den meisten Büchern über technische Mechanik zusammengestellt und überdiess führt *Wertheim* in seiner Abhandlung [1]) über die Elasticität der Metalle viele Experimentatoren namentlich auf.

Gerstner [2]) hat besonders auf den Unterschied zwischen der elastischen und bleibenden Ausdehnung hingewiesen, die Irrthümer früherer Experimentatoren aufgeklärt und gezeigt, dass die elastischen Verlängerungen, selbst wenn die s. g. Elasticitätsgrenze überschritten ist, noch proportional den Belastungen wachsen, welche Errungenschaft später *Wertheim* bei seinen umfangreichen Arbeiten über die Elasticität benützte, indem er den Elasticitätsmodul auch bestimmte, wenn

[1]) *Poggendorff's* Annalen der Physik und Chemie, Ergänzungsband II.

[2]) *Gerstner's* Handbuch der Mechanik, 2. Auflage §. 267.

die s. g. Grenze der Elasticität überschritten war. Seit dem Erscheinen der Arbeiten *Wertheim's* sind andere Physiker mit Versuchen dieser Art hervorgetreten. So finden wir „Beobachtungen über die Elasticität der Metalle", angestellt von *A. W. Napiersky* [1]) und eine Abhandlung: „Ueber die Bestimmung der Elasticitätsgrenze bei Metallen" von *R. Thalén* [2]).

Von ganz besonderem Interesse für diese Abhandlung sind die Arbeiten von *W. Weber* [3]) und *F. Kohlrausch* [4]), über die „elastische Nachwirkung", weil sie mit ersterer in einem gewissen Zusammenhange stehen. Leider ist mir die *Kohlrausch*'sche Arbeit beim Studium der hier einschlägigen Literatur gänzlich entgangen, ich hätte mich sonst sicherlich mehr, als es zufällig geschah, dieser angeschlossen. Herr Professor Dr. *Beetz* hatte die Güte, mich auf diesen Theil der einschlägigen Literatur aufmerksam zu machen, was sich bedauerlicher Weise erst zu einer Zeit ereignete, als ich meine Experimentalarbeiten schon abgeschlossen hatte. Ich werde am geeigneten Platze auf diese Arbeiten hinweisen.

Man hat sich indess nicht begnügt, die Grösse der Elasticität und Cohäsion der Metalle experimentell zu ermitteln, sondern auch den Einfluss der Wärme, der Electricität und des Magnetismus auf die erwähnte Eigenschaft zu bestimmen versucht.

Abgesehen von älteren Arbeiten, welche vorzugsweise für rein technische Zwecke angestellt wurden und sich auf die Festigkeit bezogen, hat die Elasticität bei höheren und niederen Temperaturen *Wertheim* [5]) eingehend studirt, welcher fand, dass der Elasticitätscoëfficient der Metalle mit steigender Temperatur von — 15° C. bis + 200° C. fortwährend abnimmt. Eine Ausnahme hievon machen nach *Wertheim* Stahl und Eisen, was nach den Versuchen von *F. Kohlrausch* [6]) und *F. E. Loomis* [6]) nicht richtig sein soll. Hier darf ich eine Abhandlung aus neuester Zeit „über den Einfluss der Wärme auf die Elasticität des Kautschuks" von *G. Schmulewitsch* [7]) nicht unerwähnt lassen.

---

[1]) *Poggendorff's* Annalen etc., Ergänzungsband III.
[2]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXXIV.
[3]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band XXXIV Seite 247.
[4]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXIX Seite 337 und Bd. CXXVIII Seite 1 und Fortsetzung.
[5]) *Poggendorff's* Annalen etc., Ergänzungsband II.
[6]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXLI.
[7]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXLIV.

Nach den Versuchen *Wertheim's* [1]) bewirkt der galvanische Strom in den von ihm durchlaufenen Metalldrähten eine vorübergehende Verringerung des Elasticitätscoëfficienten und ebenso eine Verringerung der Cohäsion desselben. In Bezug auf letztere hat auch *L. Dufour* [2]) Versuche angestellt.

Betreffs des Einflusses des Magnetisirens des Eisens und Stahles auf die Elasticität der letzteren hat *Wertheim* [3]) beobachtet, dass durch Magnetisiren der Elasticitätscoëfficient verringert wird und *G. Wiedemann* [4]) hat den Einfluss des Magnetisirens auf die Torsion, sowie Herr Professor Dr. *Beetz* [5]) und Andere den Einfluss der Magnetisirung auf die Länge und den Leitungswiderstand von Eisenstäben untersucht.

Auch muss ich hier die Versuche erwähnen, welche zum Zwecke hatten, die die elastische Ausdehnung der Metalle begleitenden Erscheinungen zu studiren und welche ergaben, dass beim Ausdehnen der Metalldrähte eine Temperaturerniedrigung, beim Zusammenziehen eine Temperatur-Erhöhung stattfindet. Ausser den Arbeiten von *Weber* und *Joul* etc. gehören hieher die Untersuchungen *E. Edlund's* [6]) und aus neuester Zeit die Versuche von *E. Villari* [7]), welcher in dieser Hinsicht sich mit Kautschuk beschäftigte.

Endlich erlaube ich mir, noch hinzuweisen auf die Bemühungen, welche von vielen Physikern gemacht wurden, um Beziehungen der Elasticität zu anderen physikalischen und chemischen Eigenschaften der Körper aufzufinden. So die Abhandlung von *C. C. Person* [8]): „Ueber die Beziehung zwischen dem Elasticitätscoëfficienten der Metalle und deren latenter Schmelzwärme", und eine zweite von *H. Vogel* [9]): „Ueber die Abhängigkeit des Elasticitätsmoduls vom Atomengewicht."

Nach diesen einleitenden Bemerkungen, denen ich, um Missverständnisse zu vermeiden, noch anfüge, dass die Uebersicht der Literatur auf Vollständigkeit nicht Anspruch macht, gehe ich nun zur Darstellung meiner Versuche über.

---

[1]) *Poggendorff's* Annalen etc., Ergänzungsband II Seite 99.
[2]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band XCIX.
[3]) *Poggendorff's* Annalen etc., Ergänzungsband II.
[4]) Die Lehre vom Galvanismus etc., von *G. Wiedemann*, II. Bd. 1. Abth. S. 439.
[5]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXXVIII Seite 193.
[6]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXIV.
[7]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXLIV.
[8]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band LXXV.
[9]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band CXI.

§ 2.

Beschreibung des Apparates. Bei allen in dieser Abhandlung beschriebenen Versuchen wurden Verlängerungen der zu untersuchenden Metalldrähte durch Belastungen erzeugt und diese mittels einer Spiegelvorrichtung gemessen. Der Apparat zur Hervorbringung der Verlängerungen bestand in einem in allen seinen Theilen sehr kräftig gebauten, zwei- und zwar ungleicharmigen Hebel (Schnellwaage), auf welchem über seiner Unterstützungsschneide ein Spiegel aufgesetzt war.

Der längere Arm war mit einer Theilung versehen, deren Einheit gleich der Entfernung der eben erwähnten Schneide von der Waagschalenschneide ist.

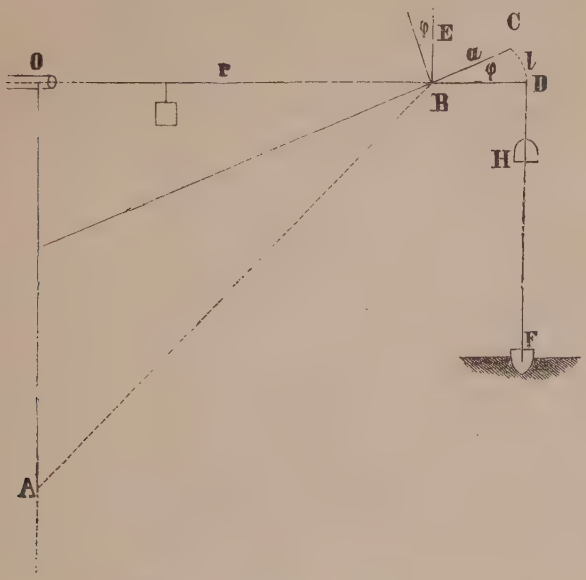
Diese Einheit, welche 7,08 cm betrug, in 10 gleiche Theile getheilt, gestattete 0,1 des Laufgewichtes direkt abzulösen.

Die Waage war an einem eichenen Balken von 180 cm Länge, 21 cm Höhe und 8,5 cm Breite befestiget, der an beiden Enden in die Mauer einer Fensteröffnung eingekeilt und in nächster Nähe des Aufhängepunktes der Waage durch einen Pfosten unterstützt war.

Eine Durchbiegung des Balkens konnte mittels einer Libelle bei den zu diesen Versuchen gebrauchten Belastungen nicht bemerkt werden. Die Befestigung der Waage an den Balken war durch eine durch den Balken geschobene, dicke Eisenstange bewerkstelliget, welche mittels einer Schraubenmutter gehoben und gesenkt werden konnte um hierdurch, nachdem der Draht eingespannt worden war, dem Hebelarm jede beliebige Stellung geben zu können. Der zu untersuchende Körper wurde einerseits am kurzen Hebelarme mittels eines Zwischenstückes und einer Klemme so befestiget, dass er sich bei der Bewegung des Hebelarmes in seiner ursprünglich vertikalen Lage erhielt, anderseits war er von einer unbeweglichen Klemme festgehalten, welche in einem entsprechend gewichtigen Stein eingelassen, der auf einer Mauer ruhte. Waage, Klemmen, welche in einigen Fällen durch Wirbel ersetzt waren, und sonstige Nebentheile hatten solche Dimensionen, dass von ihrer Dehnung durch die hier gebrauchten Lasten abgesehen werden konnte, und waren sämmtliche Stücke aus Eisen. Auf dem kürzeren Theil des Hebels war ein Gegengewicht durch eine Schraube verstellbar, so dass der Hebelarm vor der Einspannung des Drahtes ins stabile Gleichgewicht gebracht werden konnte. Das Fernrohr und die Scala waren an einer dicken Mauer befestigt und so vom Einflusse etwaiger Erschütterungen befreit.

§ 3.

Theorie des Apparates. Ich habe in den folgenden Tabellen nicht die wirklichen Verlängerungen angegeben, da diese für meine Betrachtungen und Schlüsse nicht nothwendig sind, sondern die Scalentheile und liefere nun die nöthigen Notizen zur Berechnung der wirk-



lichen Verlängerungen. Vorstehende Figur stellt den Apparat schematisch dar. F H ist der bei F und H eingeklemmte oder auf einem Wirbel aufgewundene Draht, B der Unterstützungspunkt des Hebels und B E ein Spiegel für die Ablesevorrichtung; O A die Scala der letzteren, sowie D O die Richtung des Hebels, wenn der Draht nur mit dem zum Anspannen nöthigen Gewichte belastet ist. Die Scala war hart am Fernrohre vertikal befestiget.

Ist nun die Entfernung des Spiegels von der Scala, $B\,O = r^{mm}$, $B\,C = a^{mm}$, der Winkel, um welchen sich bei einer Belastung der Hebelarm dreht $= \varphi^0$, die dadurch bewirkte wirkliche Verlängerung D C des Drahtes $= l^{mm}$, die an der Scala abgelesene Verlängerung $O\,A = L$ Theilstriche $= 2\,L^{mm}$; so ist, da bei der in der Regel angewendeten Scala ein Theilstrich 2^{mm} betrug und nur in wenigen, später bezeichneten Versuchen eine Scala angewendet wurde, bei welcher ein Theilstrich 3^{mm} gleich war,

$$l = a \sin \varphi^0 \text{ und}$$
$$2L = r \operatorname{tg} 2\varphi''$$

wenn man Δ BCD als geradlinig und rechtwinklich betrachtet. Eliminirt man daraus φ so ergibt sich

$$L = r \cdot \frac{\frac{l}{a}\sqrt{1-\left(\frac{l}{a}\right)^2}}{1-2\left(\frac{l}{a}\right)^2}$$

und da $\left(\frac{l}{a}\right)^2$ vernachlässiget werden darf, so hat man

$$L = \frac{r}{a} l \text{ und folglich}$$

$$l = \frac{a}{r} L.$$

Für unsern Apparat ist $r = 5680^{mm}$ und $a = 70{,}8^{mm}$, also $\frac{a}{r} = 0{,}012465 = 0{,}0125$ (ca) und endlich:

$$l = 0{,}0125\ L \ldots\ldots \text{I.}$$

Man sieht aus Gl. I, dass, da man 0,1 eines Scalentheils leicht schätzen kann, $0{,}001^{mm}$ der Verlängerung ziemlich genau beobachtet zu werden vermag.

Was die Correctur der Ablesungen wegen der Temperaturänderungen von einer Beobachtung zur andern betrifft, so habe ich es vorgezogen, diese nicht aus den obigen Angaben zu berechnen, sondern den Einfluss dieser Temperaturänderungen durch eigene Versuche zu bestimmen, da die Temperatur in verschiedenen Höhen verschieden ist.

Ich habe deshalb in ungleichen Höhen drei übereinstimmende Thermometer angebracht und durch mehrere Versuche gefunden, dass einer Temperaturänderung von 1° C. im Mittel 3,6 Theilstriche der Scala entsprechen, wenn Eisendrähte eingespannt waren.

Indess habe ich immer den Zeitpunkt abgewartet, bis die Temperatur des Zimmers sich durch meine Anwesenheit nicht mehr viel änderte, so dass Temperaturschwankungen über 0,3° C. nie vorkamen. Bei mehreren zusammenhängenden Ablesungen wurde die Correctur auf die erste Ablesung bezogen.

In den Tabellen sind überall die corrigirten Ablesungen angegeben.

§ 4.

Methode der Untersuchung. Bei allen Versuchen, bei welchen die Art der Anstellung nicht besonders angegeben ist, geschah diese in

folgender Weise: Der bereits gerade gezogene Draht wurde nach seiner Einfügung in den Apparat durch ein kleines Gewicht angespannt und hiedurch zugleich dem Hebel eine feste Stellung gegeben. Hierauf wurde der Hebel durch eine Schraube unterstützt und die eigentliche Belastung auf denselben aufgelegt und nun der Hebelarm mittels dieser Schraube langsam und mit möglichst gleichförmiger Geschwindigkeit herabgelassen, wodurch der Draht die dem statischen Momente des Gewichtes entsprechende Spannung erhielt. Bei unbelastetem Hebelarme und in seiner jetzigen Stellung wurde durch das Fernrohr abgelesen. Ebenso langsam geschah das Hinaufschrauben des Hebels und, nachdem die Belastung abgenommen war, wurde wieder abgelesen, sobald der Hebel von seiner Unterstützung befreit war. Mit jeder Ablesung auf der Scala war eine solche auf den Thermometern verbunden. Es ist leicht einzusehen, dass man aus diesen drei Beobachtungen durch blosse Subtraktion die bleibende und elastische Ausdehnung erhält. Nun kann ich zu den einzelnen Versuchen selbst übergehen.

§ 5.

Versuche. Die meisten Experimentatoren haben nur auf jene bleibenden Verlängerungen, welche durch verschiedene, successive gesteigerte Belastungen entstehen, ihre Aufmerksamkeit gerichtet. Nun ist aber bekannt, dass dieselbe Belastung die bleibende Ausdehnung mit der Zeit vergrössert, dass diese also eine Funktion der Zeit ist. Die zunächst folgenden Versuche haben den Zweck, diese Reckungen näher kennen zu lernen.

Zu diesem Behufe liess ich einen Draht durch dasselbe Gewicht öfters hintereinander spannen, und mass die elastische und bleibende Verlängerung, wobei das Gewicht immer gleiche Zeiten wirkte. In den nächstfolgenden Tabellen sind die Versuchsresultate zusammengestellt, welche an drei Eisendrähten, die ganz gerade und aus derselben Masse von gleicher Dicke gezogen waren, angestellt, gewonnen wurden. Das Verfahren war bei den drei Drähten dasselbe und unterscheiden sich diese Versuche nur durch die Verschiedenheit der angewandten Gewichte. Dabei sind drei Ablesungen an der Spiegelscala nöthig. Zwischen der zweiten und dritten Ablesung liess ich jedesmal genau 10 Minuten verstreichen, denn so lange dauerte es, bis der Zeiger ruhig stand. Auch sind in den Tabellen nicht die wirklichen Verlängerungen, sondern die entsprechenden Scalentheile angegeben, da sie eine bessere Uebersicht gewähren und das Nöthige zur Umrechnung bereits angegeben wurde. Die angegebenen Ver-

längerungen sind ferner die der eingespannten Drähte und nicht auf die des Meters zurückgeführt.

Sind nun N_1 die beobachteten Scalentheile, wenn der Draht nur mit einem zum leichten Anspannen nöthigen Gewichte, hier 0,4 Kgr. (stat. Moment) belastet ist, N_2 die abgelesenen Scalentheile bei der Belastung Q und N_3 die Scalentheile wieder bei der Belastung 0,4 Kgr., so ist die elastische Ausdehnung $\varepsilon = N_2 - N_3$, die bleibende Verlängerung $\beta = N_3 - N_1$. Die Summe der bleibenden Ausdehnungen ist in der Rubrik s enthalten. Nach jeder Versuchsreihe wurde durch die Rechnung untersucht, ob die schliessliche Stellung des Zeigers der Spiegelscale mit der Endtemperatur übereinstimmt. Die Zimmertemperatur war gewöhnlich: 15°—17° C.

Tabelle Ia.

Länge l_0 des Drahtes = 1,0765^m.
Belastung Q = 24 Kgr. (statisches Moment).

No.	ε	β	s
1	173,4	7,1	7,1
2	174,1	1,0	8,1
3	173,6	0,9	9,0
4	173,8	0,3	9,3
5	173,8	0,5	9,8
6	174,0	0,1	9,9

Tabelle Ib.

Derselbe Draht, Belastung Q = 33 Kgr. (statisches Moment).

No.	ε	β	s
1	245,2	16,0	16,0
2	243,8	4,2	20,2
3	244,0	2,7	22,9
4	244,2	1,9	24,8
5	244,5	1,1	25,9

Es wurden nun mit zwei anderen Eisendrähten von derselben Länge und Dicke in ganz derselben Weise Versuche vorgenommen, aber grössere Belastungen angewendet.

Tabelle II.

Belastung Q = 28,5 Kgr. (statisches Moment).

No.	ε	β	s
1	207,5	9,9	9,9
2	207,7	2,1	12,0
3	207,8	1,0	13,0
4	207,9	1,1	14,1
5	207,4	0,7	14,8
6	207,9	0,2	15,0
7	208,3	14,3	29,3
8	208,3	57,3	86,6

Bei dem Versuche Nr. 7 vorstehender Tabelle war die Dauer der Belastung 1348 Viertelstunden, bei dem Versuche No. 8 aber 2104 Viertelstunden. Die elastische Ausdehnung hat sich damit nicht merklich geändert, dagegen entstanden fortwährend Streckungen.

Tabelle III.

Belastung Q = 33 Kgr. (statisches Moment).

No.	ε	β	s
1	246,4	23,7	23,7
2	245,2	4,6	28,3
3	245,7	3,0	31,3
4	245,7	1,8	33,1
5	245,8	1,9	35,0
6	245,8	2,0	37,0

Aus diesen Versuchen geht zunächst hervor, dass die bleibende Verlängerung eine Funktion der Zeit ist. Ob die Elasticität von den Streckungen unabhängig ist, lässt sich aus diesen in Bezug auf Reckungen innerhalb so enger Grenzen angestellten Versuche nicht mit Sicherheit schliessen. Ich werde auf diesen Punkt bei späteren Experimenten zurückkommen.

Was nun die bleibenden Ausdehnungen bei verschiedenen Belastungen Q nach Verlauf von gleicher Anzahl Zeiteinheiten betrifft, so bemerke ich, dass der Quotient der Zahlen s je zweier der obigen Tabellen für gleiche Zeiten als constant betrachtet werden kann, dass also für jede Belastung die Streckungen nach demselben Gesetze zunehmen müssen. In folgender Tabelle sind mehrere dieser Quotienten angeführt.

Tabelle IV.

Quotienten der Zahlen s aus der:

Nach der Zeit	Tabelle II und Tabelle Ia	Tabelle Ib und Tabelle II.	Tabelle III und Tabelle II.
1	1,394	1,616	2,393
2	1,481	1,683	2,358
3	1,444	1,761	2,407
4	1,515	1,758	2,347
5	1,510	1,750	2,364
6	1,515		2,466

§. 6.

Empirische Formel. Die Function $s = f(t)$, welche den gesetzmässigen Zusammenhang zwischen der Zeit t und der während dieser Zeit entstandenen Reckung s darstellt, muss offenbar mit wachsendem t langsam zunehmen. Ich habe es unter anderem versucht, der f (t) die Form:

$$s = a \sqrt[n]{t} \qquad \text{II.}$$

zu geben, worin a die in der ersten Viertelstunde, der Zeiteinheit, hervorgebrachte bleibende Ausdehnung ist, so dass für $t = 1$, $s = a$

wird und n eine wenigstens für dasselbe Q nahezu constante Zahl ist. Dass n beinahe constant ist, sollen die Versuche darthun.

Aus Gl. II ergibt sich:

$$n = \frac{\log t}{\log s - \log a} \qquad \text{III.}$$

Setzt man in III successive die entsprechenden Werthe aus den Tabellen Ib, II und III (Ia gibt so weit von einander abweichende Werthe für n, dass sie nicht zu gebrauchen sind, wahrscheinlich weil die Streckungen zu gering, also die Beobachtungsfehler von bedeutendem Einflusse sind), so erhält man für n folgende Werthe:

Tabelle V.

	Aus Tabelle I b n =	Aus Tabelle II n =	Aus Tabelle III n =
	2,971	3,720	3,904
	3,064	4,033	3,949
	3,162	3,919	4,149
	3,341	3,936	4,126
		4,311	4,021
Mittel	3,134	3,983	4,029

Sind nun in dieser Tabelle die Werthe von n auch nicht vollkommen übereinstimmend, so sind sie doch nicht so sehr abweichend, um nicht als constant betrachtet werden zu können, um so mehr, als man zu berücksichtigen hat, dass ausser der nicht vollkommen genauen Correctur wegen der Temperaturänderungen auch eine kleine Fehlerquelle darin liegt, dass bei dem jedesmaligen Belasten, trotz der grössten Vorsicht, Ungleichheiten möglich sind. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass, während die arithmetischen Mittel der aus den Tabellen II und III berechneten Werthe von n, also bei verschiedenen Q fast ganz gleich sind, das Mittel der aus Tabelle I b berechneten n kleiner ist, und weise zugleich darauf hin, dass der Draht der Tabelle I b bereits Reckungen hatte (siehe Tab. I a), während bei den Drähten der Tab. II und III gleicher Anfangszustand vorausgesetzt werden kann.

R. Thalén gibt in der schon erwähnten Abhandlung[1]) auch eine Reihe von Versuchsresultaten an, welche sich durch ein ähnliches Verfahren ergaben, also mit den meinigen vergleichbar sind. Formel III auf diese Zahlen angewendet liefert für n die Werthe: 1,581; 1,689; 1,758; 1,796; 1,852. Diese Werthe wachsen stetig, während die von mir bestimmten Zahlen, wenn auch im Allgemeinen steigend, doch diess nicht stetig thun.

Vielleicht ist dieses stetige Steigen die Folge einer constanten Fehlerquelle, auf welche *Thalén* (Seite 613 unten) selbst hindeutet. Ich setze übrigens voraus, dass bei diesen Versuchen ebenfalls in gleichen Zeitintervallen abgelesen wurde.

§ 7.

Eine andere Untersuchungsmethode. Nun gestatten die Resultate der bisherigen Versuche, wonach die elastische Ausdehnung bei derselben Belastung wenigstens innerhalb dieser Grenzen von der bleibenden Ausdehnung unabhängig ist, noch eine andere Methode der Untersuchung, bei welcher der oben erwähnte Missstand, der durch das öftere Belasten entsteht, vermieden werden kann. Es besteht die Art der Untersuchung darin, die in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten bleibenden Verlängerungen zu bestimmen, ohne die Belastung abzunehmen. Da nämlich die Bewegung des Zeigers im Fernrohre nicht durch Veränderung der elastischen Spannung entsteht, sondern eine Folge der Reckungen ist, so ist leicht zu erkennen, dass man aus den Beobachtungen der Stellung des Zeigers nach beliebigen Zeiten, die diesen entsprechenden Reckungen durch Subtraktion berechnen kann, wenn man die elastische Ausdehnung kennt, welche aus der Endstellung des Zeigers während der Belastung und aus jener bei abgenommener Belastung durch Subtraktion sich ermitteln lässt. Ist also N_1 die bei unbelastetem Drahte beobachtete Zahl, N_2' N_2'' N_2''' . . . . N_2^ν die bei der Belastung Q nach den Zeiten 1, 2, 3 . . . ν beobachteten Zahlen und N_3 jene bei unbelastetem Drahte, so ist die elastische Ausdehnung $\varepsilon = N_2^\nu - N_3$ und die bleibenden Ausdehnungen, welche obigen Zeiten entsprachen:

$$s_1 = N_2' - (\varepsilon + N_1); \quad s_3 = N_2''' - (\varepsilon + N_1)$$
$$s_2 = N_2'' - (\varepsilon + N_1); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$s_\nu = N_2^\nu - (\varepsilon + N_1) = N_2^\nu - (N_2^\nu - N_3 + N_1) = N_3 - N_1$$

[1]) *Poggendorff*'s Annalen etc. CXXIV Seite 613.

Nach dieser Methode habe ich mit zwei Eisendrähten Versuche angestellt, deren Ergebnisse in folgender Tabelle zusammengestellt sind. Länge und Dicke der Drähte waren dieselben wie bei den früheren Versuchen und als Zeiteinheit ist die Viertelstunde beibehalten.

Tabelle VI.

A			B		
Zeit	Streckungen Q = 33 Kgr.		Zeit	Streckungen Q = 36 Kgr.	
	beobachtet s =	berechnet s =		beobachtet s =	berechnet s =
1	18,9	18,90	1	18,6	18,60
2	21,4	21,38	2	21,9	18,67 (?)
3	23,0	22,97	3	23,5	23,30
4	24,2	24,17	4	25,1	24,70
5	25,3	25,15	$5\frac{2}{3}$	26,6	26,52
6	26,0	25,98	$6\frac{2}{3}$	27,5	27,42
7	26,6	26,70	$18\frac{1}{3}$	32,6	33,73
			28	34,7	36,78
			$69\frac{1}{3}$	41,4	44,29

Die Zahlen der Versuchsreihe B beziehen sich auf eine Scala, bei welcher ein Theilstrich = 3^{mm} ist.

Wendet man die Gleichung III auf vorstehende Beobachtungszahlen an, so erhält man für n die in nachstehender Tabelle VII angegebenen Werthe.

Tabelle VII.

A.	B.
n =	n =
5,584	4,245 (?)
5,599	4,695
5,611	4,624
5,521	4,847
5,626	4,852
5,829	5,183
Mittel = 5,628	5,344
	5,297
	Mittel = 4,886.

Während die Zahlen der Reihe A die gehoffte Uebereinstimmung zeigen, ist diess bei der Reihe B nicht in demselben Maasse der Fall. Berücksichtiget man indess, dass sich die Versuchsreihe B in Bezug auf die Zeit viel weiter ausdehnt, und sich diese Uebereinstimmung für die grössere Dauer wieder herstellt, so ist man, denke ich, zu dem Schlusse berechtiget, dass die Reihe B der A nicht widerspricht, sondern dass vielmehr die Abweichung der Reihe B auf Rechnung einer fehlerhaften Beobachtung, oder was wahrscheinlicher, einer abweichenden Beschaffenheit des Drahtes zu setzen ist. Damit will ich jedoch der Anschauung, dass die Werthe von n für höhere Zeiten wirklich zunehmen, nicht entgegentreten, aber für Streckungen, welche bei derselben Belastung in der nächsten Nähe der Elasticitätsgrenze stattfinden, und welche hier im Auge behalten sind, dürfte n als nahezu constant anzusehen sein.

In der Tabelle VI sind die unter Anwendung der Werthe von n aus Tabelle VII, aus Gl. II berechneten Zahlenwerthe von s aufgeführt. Auch sind in der dieser Abhandlung angefügten Tafel die bisherigen Versuchsresultate graphisch dargestellt, und zwar in der Art, dass die Zeiten als Abscissen, die zugehörigen Reckungen als Ordinaten aufgetragen sind. Die Zahlen der Reihe B Tabelle VI sind auf dieser Tafel wegen ihrer Ausdehnung nicht angegeben.

§. 8.

Theoretische Betrachtung. Die bisherigen Versuchsresultate geben nun auch einen Ausgangspunkt für eine theoretische Betrachtung. Wir haben immer unterschieden zwischen elastischer und bleibender Verlängerung und gefunden, dass erstere von der Zeit unabhängig ist. Wenn nun wie hier die Erfahrung lehrt, trotzdem ein Gleichgewichtszustand nicht besteht, so müssen wir wohl annehmen, dass dieser nicht vorhanden zwischen der elastischen Kraft und jener, die überwunden werden muss, wenn eine Streckung erzeugt werden soll, und dass dieses Ungleichgewicht schon bestanden hat, wenigstens von dem Momente ab, in welchem die Last zur vollen Wirkung kam.

Setzen wir nämlich die Existenz einer Elasticitätsgrenze voraus, so werden Belastungen, welche kleiner sind als diese Grenze, eine bleibende Ausdehnung nicht hervorbringen Erhöht man diese Belastung bis zur Elasticitätsgrenze, so sind der dem Dehnen sich entgegensetzende Widerstand und die elastische Spannung einander gleich und es müsste Gleichgewicht sein. Hat aber wie bei unsern Versuchen

die Belastung die Elasticitätsgrenze überschritten, ist also die elastische Spannung grösser als der erwähnte Widerstand, so muss Bewegung eintreten, und zwar, da die Spannung grösser als die Cohäsion, eine anfänglich beschleunigte.

In Folge der Streckung wächst aber die Cohäsion, bis beide Kräfte gleich sind, und darüber hinaus; von da ab wird die Bewegung verzögert. Dieser ganze Vorgang geschieht in einer sehr kurzen Zeit; er ist zur Zeit $t = 1$ längst vollendet. Dass in der auf die Zeit $t = 0$ zunächst folgenden Zeit ein von dem späteren wesentlich verschiedener Vorgang stattfindet, darauf, meine ich, deutet schon die grosse Streckung während der Zeit $t = 1$ hin gegenüber den Streckungen der folgenden Zeiten. Da ferner zur Zeit $t = 1$ noch lebendige Kraft genug vorhanden ist, durch welche sich die Bewegung fortsetzt, so ist anzunehmen, dass die Cohäsionskraft nicht so weit über die elastische Spannung hinauswuchs, dass die lebendige Kraft der Bewegung vollständig hätte aufgezehrt werden können, wodurch Ruhe entstanden wäre. Es drängt sich nun die Frage auf, ist die Cohäsionskraft etwa von $t = 1$ an noch im Wachsen oder nicht. Für das Wachsen ist, meine ich, wenig Wahrscheinlichkeit vorhanden, da sonst sehr bald ein Gleichgewichtszustand sich herstellen müsste; übrigens können wir diese Frage von $t = 1$ ab mathematisch verfolgen.

§. 9.

Fortsetzung. Beschränkt man sich nun auf die bleibenden Ausdehnungen und zwar auf jene, welche erzeugt werden, wenn die Elasticitätsgrenze nicht weit überschritten ist, bleibt man also innerhalb der von diesen Versuchen gesetzten Grenze, so hat man aus Gleichung II:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a}{n} \cdot t^{\frac{1-n}{n}} = \frac{s}{nt} = v$$

wenn v die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Zeiger sich bewegt. Diese Formel erinnert an die von *Kohlrausch* in der schon erwähnten Abhandlung Seite 418 abgeleiteten.

Ist $t = 1$, so ist $v = \frac{a}{n} = v_0$.

Diese Gleichung gilt nur für Werthe von $t \geqq 1$; denn auf welche Art die Bewegung vor der Zeit $t = 1$ vor sich geht, darüber geben die Versuche keine Anfklärung. Setzen wir daher

$$s = a + \varsigma$$

so ist: $\varsigma = s - a = a\left(t^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

$$\text{und } \frac{d\varsigma}{dt} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{t^{\frac{n-1}{n}}} = v$$

$$\text{ferner } \frac{dv}{d\varsigma} = -\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^n$$

$$\text{daher: } v \cdot \frac{dv}{d\varsigma} = -\frac{n-1}{n^2}\left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2n} \cdot (a+\varsigma)$$

Ist k die Beschleunigung der Widerstandskraft und g jene der Schwere, so ist:

$$g - k = -\frac{n-1}{n^2} \cdot \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2n} \cdot (a+\varsigma) \text{ oder}$$

$$k = g + \frac{n-1}{n^2}\left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2n} \cdot (a+\varsigma) \ldots \text{IV}$$

Für $\varsigma = 0$ also zur Zeit $t = 1$ ist:

$$k = g + \frac{n-1}{n^2} \cdot a$$

So lange $n > 1$, was nach den Versuchsresultaten der Fall ist, ist $k > g$.

$$\text{Da ferner } \frac{dk}{d\varsigma} = -\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \cdot \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2n}$$

so nimmt mit wachsendem ς der Werth von k ab, woraus zu schliessen ist, dass in der Zeit vor $t = 1$ schon der Werth von

$k > g + \frac{n-1}{n^2} a$ war. Denkt man sich die Masse m unmittelbar an dem zu untersuchenden Draht aufgehängt, so ist, wenn man deren Gewicht mit Q bezeichnet, der gesammte im Draht entwickelte Widerstand:

$$P = \frac{Q}{g}\left[g + \frac{n-1}{n^2}\left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2n} \cdot (a+\varsigma)\right] \ldots \text{V.}$$

Fassen wir nun das Resultat der beendigten Betrachtung kurz, so dürfte dieses etwa lauten:

> *„Eine Belastung, grösser als die s. g Elasticitätsgrenze, bewirkt in einem Drahte innerhalb einer sehr kurzen Zeit eine Erhöhung der Cohäsion, welche durch andauernde Wirkung derselben Belastung wieder verringert wird; und hierin scheint der Einfluss der Zeit bei der Streckung zu liegen.“*

§. 10.

Fortsetzung. Während die bleibende Verlängerung $s - a = \varsigma$ entsteht, wird die Arbeit A_0^{ς} vom Draht geleistet und es ist:

$$A_o^\varsigma = \frac{Q}{g} \int_o^\varsigma \left[g + \frac{n-1}{n^2} \cdot \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2n} \cdot (a+\varsigma) \right] d\varsigma$$

$$A_o^\varsigma = Q\varsigma + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \left(\frac{a}{n}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2(n-1)}\right] \text{ oder}$$

$$A_o^\varsigma = Q\varsigma + \frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 \cdot \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2(n-1)}$$

Nun ist es aber auch möglich, die gesammte Arbeit A_o^ς der Cohäsionskraft zu bestimmen. Es ist nämlich die lebendige Kraft L_o der Masse m, nachdem diese den Weg a zurückgelegt hat:

$$L_o = \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{a}{n}\right)^2$$

Nennt man A_o^a die Arbeit der Cohäsionskraft von o bis a, so ist:

$$A_o^a = Q a - \frac{1}{2} m v_o^2$$

Daher die gesammte Arbeit:

$$A_o^a = Q a - \frac{1}{2} m v_o^2 + Q\varsigma + \frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 \cdot \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2(n-1)}$$

$$A_o^a = Q(a+\varsigma) - \frac{1}{2} m v_o^2 \cdot \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2(n-1)} \quad \ldots \text{VI.}$$

Da Q (a + ς) die Arbeit der Schwerkraft, so ist der Unterschied beider $= \frac{1}{2} m v_o^2 \left(\frac{a}{a+\varsigma}\right)^{2(n-1)}$, was man auch aus den der Gl. IV unmittelbar vorangehenden erhalten haben würde, wogegen dieses längere Verfahren mir durchsichtiger scheint; es ist dieser Unterschied ein Bruchtheil der lebendigen Kraft zur Zeit t = 1.

§. 11.

Einfluss der Streckung auf die Elasticität. Der Umstand, dass die Streckungen bei derselben elastischen Ausdehnung ungleich grösser werden, je nachdem man diese elastische Ausdehnung schnell oder langsam hervorruft, sowie dass ein zufälliges Schwingen der Belastung die bleibende Verlängerung jedesmal vergrössert, obschon die elastische Ausdehnung nicht vergrössert wird, deutet darauf hin, und den vorigen Betrachtungen liegt diese Thatsache zu Grunde, dass die bleibende Verlängerung durch einen Theil der beim Herabgehen der Belastung erzeugten lebendigen Kraft hervorgebracht wird.

Bei den bisherigen Versuchen sind diese Schwingungen klein, so dass sie nur durch die Spiegelablesung gut beobachtet werden können. Ich habe deshalb bei den folgenden Versuchen den ganzen

Vorgang dadurch wahrnehmbarer gemacht, dass ich diese Schwingungen durch plötzliches Loslassen der angehängten Belastung erzeugte.

Der hiezu verwendete Apparat ist der beschriebene, nur war der Draht statt eingeklemmt, an beiden Enden über einen Wirbel gewunden, eine Vorsicht, die mir bei Anwendung bedeutender Zugkräfte am Platze schien, indem durch das hier nothwendig werdende starke Einklemmen leicht eine Quetschung des Drahtes verursacht werden könnte.

Das Gewicht wurde mittelst eines nicht mehr dehnbaren Bindfadens so über dem Hebelarme aufgehängt, dass es denselben zwar berührte, aber kaum merklich herabdrückte und dann wurde der Bindfaden ganz plötzlich durchschnitten oder abgebrannt, so dass jetzt das Gewicht mit dem Hebelarme schwingen konnte.

Unbelastet, nach vollendetem Ausschwingen, und wiederum unbelastet wurde der Stand des Zeigers der Spiegelscala abgelesen; diese drei Ablesungen ergaben die elastische und bleibende Ausdehnung. Es wurde mehrmals hintereinander mit derselben Belastung an demselben Drahte der Versuch wiederholt. Sind wieder ε und β bezüglich die elastischen und bleibenden Ausdehnungen, so sind die Versuchsresultate in folgenden Tabellen zusammengestellt, in welchen die ersten drei Columnen die Zahlen enthalten, wie sie der Reihe nach abgelesen worden sind.

Tabelle VIII.

Eisendraht von 1,054^{m} Länge und derselben Dicke wie die früheren, bei der mittleren Temperatur von 15° C.

A. Belastung = 6,99 Kgr. am Hebelarme = 2,4.

No.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	18,0	143,5	59,2	84,3	41,2
2	27,3	119,0	36,0	83,0	9,7
3	36,0	121,8	40,0	81,8	4,0
4	41,0	124,7	43,0	81,7	2,0
5	43,0	126,1	44,4	81,7	1,4
6	44,1	128,0	46,3	81,7	2,2

Mittel = 82,4.

B. Derselbe Draht; Belastung = 6,99 Kgr. am Hebelarme = 3,4.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	11,2	140,2	36,0	104,2	24,8
2	36,0	141,9	38,9	103,0	2,9
3	38,7	145,0	42,0	103,0	3,3
4	42,0	146,8	44,9	101,7	2,9

Mittel = 102,9.

C. Derselbe Draht; Belastung = 6,99 Kgr.; wieder am Hebel-Arm = 2,4.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	34,0	114,8	38,0	76,8	4,0
2	38,0	115,2	38,9	76,3	0,9
3	36,0	113,8	37,1	76,7	1,1
4	36,0	114,0	37,2	76,8	1,2

Mittel = 76,6.

D. Derselbe Draht; Belastung = 6,99 Kgr.; am Hebelarm = 4,0.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	4,7	149,0	32,0	117,0	27,3
2	32,0	154,1	37,9	116,2	5,9
3	37,1	157,1	41,9	115,2	4,8
4	41,9	158,6	43,1	115,5	1,2
5	43,1	160,0	45,2	114,8	2,1
6	46,0	162,0	47,9	114,1	1,9
7	47,2	162,6	49,0	113,6	1,8
8	53,4	168,9	54,8	114,1	1,4

Mittel = 115,1.

E. Derselbe Draht; Belastung = 6,99 Kgr.; wieder am Hebel-Arme = 3,4.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	54,3	152,0	54,8	97,2	0,5
2	54,8	152,1	55,1	97,0	0,3

Mittel = 97,1.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe zusammengestellt, die mit einem Kupferdrahte in derselben Weise wie die vorigen angestellt wurden. Drahtlänge = 1,055^m.

Tabelle IX.

A. Belastung = 4 Kgr.; am Hebelarme = 2,3.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	45,0	155,0	88,0	67,0	43,0
2	88,0	163,8	95,1	68,7	7,1
3	95,1	167,2	98,9	68,3	3,8

Mittel: = 68,0.

B. Belastung = 4 Kgr.; am Hebelarme = 3,3.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	74,5	203,3	106,0	97,3	31,5
2	106,0	216,4	119,0	97,4	13,0
3	119,0	230,1	131,1	99,0	12,1

Mittel = 97,9.

C. Belastung = 4 Kgr.; wieder am Hebelarme = 2,3.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	131,1	199,0	132,1	66,9	1,0

Mittel = 66,9.

D. Belastung = 4 Kgr.; am Hebelarme = 4,0. Die elastische Ausdehnung konnte wegen unzureichender Scalenlänge nicht gemessen werden.

Nr.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	97,3	—	181,5	—	84,2
2	181,0	—	270,7	—	89,7

E. Belastung = 4 Kgr.; wieder am Hebelarme = 2,3.

No.	N_1	N_2	N_3	ε	β
1	33,0	111,6	43,0	68,6	10,0
2	42,6	111,4	44,0	67,4	1,4
3	43,3	111,7	43,8	67,9	0,5

Mittel = 67,9.

F. Belastung = 4 Kgr.; wieder am Hebelarme = 3,3.

No.	N_1	N_3	N_2	ε	β
1	44,0	152,6	54,6	98,0	10,6
2	54,6	161,8	64,6	97,8	10,0

Mittel = 97,9.

§. 12.

Schlüsse aus den Versuchen des vorigen §. Wollen wir nun zusehen, welche Schlüsse sich aus den Versuchen der Tabellen VIII und IX ziehen lassen. Betrachten wir zuerst die Zahlen der Verschiebungen, Vertikalreihe β, so nehmen wir bei Eisen wahr, dass diese anfangs sehr rasch abnehmen, dann aber nahezu constant werden. Wendet man dann eine neue Belastung, resp. ein grösseres Trägheitsmoment an, so werden die bleibenden Verschiebungen grösser und bei Wiederholung des Versuches mit derselben Belastung nähern sich diese einer constanten Grösse.

Da die elastische Ausdehnung nahezu dieselbe bleibt, so müssen wir annehmen, dass durch das Strecken die Festigkeit des Drahtes erhöht wird. Es kann nicht befremden, dass durch wiederholte Wirk-

ung desselben Moments stets wieder Verschiebungen erzeugt werden, sowie, dass durch ein darauffolgendes kleineres Moment eine neue Verschiebung hervorgebracht wird, wohl aber kann die Erscheinung, dass dieses eine gegen die vorhergehende grössere Verschiebung hervorruft (Tab. VIII. C No. 1) meines Dafürhaltens nur durch die Annahme erklärt werden, dass die Wirkung nicht blos von der Kraft, sondern auch von der Zahl der Schwingungen abhängt, die innerhalb einer gewissen Zeit erfolgen.

Ganz ähnliche Erscheinungen zeigen die Verschiebungen beim Kupferdraht, nur mit dem Unterschiede, dass der Widerstand für dieselbe Belastung alsbald gleichmässig wird.

Interessanter noch sind die Ergebnisse in Bezug auf die elastische Ausdehnung. Fassen wir wieder zuerst die Versuche mit Eisen ins Auge, so bemerken wir in Tab. VIII in der Vertikalreihe ε im Durchschnitte eine Abnahme der Zahlenwerthe. Diese Thatsache macht es wahrscheinlich, dass mit Zunahme der Verschiebungen nicht nur die Festigkeit, sondern auch der Elasticitätsmodul wächst. Diese Wahrscheinlichkeit wird aber zur vollen Gewissheit, wenn wir die arithmetischen Mittel der elastischen Ausdehnungen bei gleichen Belastungen, also bei A und C, sowie bei B und E vergleichen. Die Differenzen dieser Mittel betragen beziehungsweise:

$$82{,}4 - 76{,}6 = 5{,}8$$
$$102{,}9 - 97{,}1 = 5{,}8$$

welche Uebereinstimmung zwar zufällig, die Grösse der Differenzen aber so bedeutend sind, dass von Beobachtungsfehlern nicht die Rede sein kann. Die hier nicht berücksichtigte Querschnittsverringerung spricht nur zu Gunsten meiner Behauptung.

Ich glaube, damit eine neue Thatsache constatirt zu haben, indem man nach den Versuchen von *Lagerhjelm* [1]) zwar annimmt, dass durch das Strecken die Elasticitätsgrenze, aber nicht die Elasticität des Eisens geändert wird, und bin überzeugt, zur Aufstellung folgenden Satzes berechtiget zu sein:

> *„Die Elasticität des Eisens ist von der Streckung nicht unabhängig, sondern der Elasticitätsmodul wächst mit der Streckung.“*

Lagerhjelm [2]) hat schon eine kleine Variation in den Elasticitätscoëfficienten des Eisens innerhalb der Elasticitätsgrenze bemerkt,

---

[1]) Versuche über Dichtigkeit etc., übersetzt von *v. Pfaff*, oder *Poggendorff*'s Annalen etc. Band XIII Seite 407 (unten).

[2]) *Poggendorff's* Annalen etc., Band XIII. Seite 407 (oben).

so dass, wenn man sich der Elasticitätsgrenze nähert, die Ausziehung ein wenig geringer wird, als es die Proportionalität zur Ziehkraft verlangt. Diese Erscheinung ist aber offenbar eine Folge des eben aufgestellten Satzes und beweist, dass es höchst wahrscheinlich gar keine Elasticitätsgrenze gibt.

Stellt man dieselben Vergleiche beim Kupfer an, so findet man die Mittel von ε bei gleichen Belastungen so wenig verschieden, dass man zu schliessen berechtiget ist, hier sei die Elasticität von den Reckungen unabhängig.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir, auf Folgendes aufmerksam zu machen: In der Abhandlung von *G. Wertheim* [1]) über die Elasticität der Metalle findet sich folgende Stelle: „Dem ist aber nicht mehr so, wenn die Elasticitätsgrenze überschritten ist; man kennt weder die Gesetze der bleibenden Verschiebungen, noch deren Einfluss auf die Elasticität. Nur in jüngster Zeit hat Herr *Gerstner* durch genaue Versuche mit Stahldrähten zu zeigen versucht, dass ein der Ausdehnung unterworfener Draht sich in jedem neuen Stabilitätszustand wie in seinem ursprünglichen Zustand verhält; dass nicht allein die Verlängerungen den angelegten Kräften proportional bleiben, so lange man nicht die Belastung bis zum Entstehen einer neuen permanenten Verlängerung erhöht, sondern dass die proportionalen Verlängerungen, die durch gleiche Gewichte erzeugt werden, noch in den verschiedenen Gleichgewichtszuständen dieselben bleiben. Hiernach muss man denselben Elasticitätscoëfficienten bekommen, es mögen die Belastungen die Elasticitätsgrenze überschreiten oder nicht."

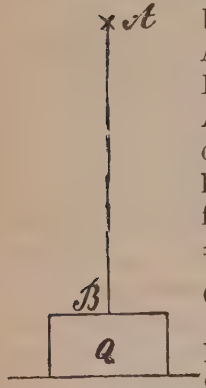
Darnach bestimmte *Wertheim* die Elasticitätsmodule auch beim Eisen in der Voraussetzung, denselben Elasticitätscoëfficienten zu erhalten, gleichviel, ob die Grenze der Elasticität überschritten ist oder nicht. Ich halte das nunmehr für einen kleinen Irrthum, denn es bieten nur die Ablesungen mit dem Kathetometer nicht den genügenden Grad von Feinheit, um die Regelmässigkeit in den Veränderungen der Elasticität mit Sicherheit zu bemerken. Man muss offenbar grössere Elasticitätsmodule erhalten, wenn die bleibenden Ausdehnungen zunehmen, und in der That ersieht man aus den *Wertheim*'schen Versuchen über die Elasticität des ausgezogenen Eisens (erwähnter Bd. Seite 39), dass die Module (q) im Allgemeinen wachsen. Vergleicht man dagegen dessen Resultate beim Kupfer (derselbe Bd.

[1]) *Poggendorff's* Annalen etc., Ergänzungsband II. Seite 2.

Seite 35), so zeigt sich, wie nach meinen Versuchen zu erwarten, eine auffallende Uebereinstimmung der Elasticitätsmodule. Ich glaube damit einen kleinen Beitrag zu den Sätzen 1 und 7 der „Folgerungen", welche *G. Wertheim* aus seinen Versuchen zieht (Seite 69) geliefert zu haben.

§. 13.

Betrachtungen über das Entstehen der Reckungen. Wir setzen einen Draht voraus, der vollkommen elastisch, bei welchem also durch Belastung keine bleibende Ausdehnung entsteht und untersuchen die Art der Bewegung. Dabei nehme ich an, der Draht sei in A befestiget und in B mit einem Gewicht = Q versehen, ohne denselben zu spannen. Auf irgend eine Art komme Q plötzlich ohne Stoss etc. zur Wirkung. Es frägt sich, welche Bewegung tritt ein? Es sei AB = 1^m und der Querschnitt = $1\square^{mm}$; die Masse des Gewichtes sei $m = \frac{Q}{g}$. Wir denken uns im Schwerpunkte der Masse M zwei Kräfte, nämlich Q und die Spannkraft P des Drahtes angreifend. Da letztere bei vollkommener Elasticität im Allgemeinen proportional der elastischen Verlängerung, so ist, wenn wir diese x heissen, $P = m\,k\,x$, wo also mk die Grösse der Spannkraft bei der Ausdehnung vom 1^m ist. Es ist also:



$$g - kx = v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\text{daher } \int v\,dv = g\int dx - k\int x\,dx + C$$

$$\text{und da } C = 0;\quad v = \pm\sqrt{(2g - kx)\,x} \qquad \text{VII.}$$

Es ist v=o wenn x=o oder $x = 2\frac{g}{k}$; dagegen wird v ein Maximum V wenn $x = \frac{g}{k} = s_1$ und dieses Maximum ist $V = \frac{g}{\sqrt{k}}$

Die Gleichung VII lehrt, dass die Bewegung eine fortdauernd oscillirende wird. Ferner ist, wenn t die Zeit einer Schwingung:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2gx - kx^2}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \text{arc sin}\ \frac{kx - g}{g} + C;$$

für $x = o$ ist $t = 0$; daher $C = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\pi}{2}$ also:

$$t = \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\text{arc. sin.} \frac{kx - g}{g} + \frac{\pi}{2} \right]$$

Für $x = 2 \cdot \frac{g}{k}$ ist $t = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$; somit die Zeit eines Hin- und Herganges $t_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$. Je grösser k, je kleiner also m ist, desto kürzer ist die Schwingungszeit und würde bei vollkommener Elasticität ein Gleichgewichtszustand nie mehr eintreten.

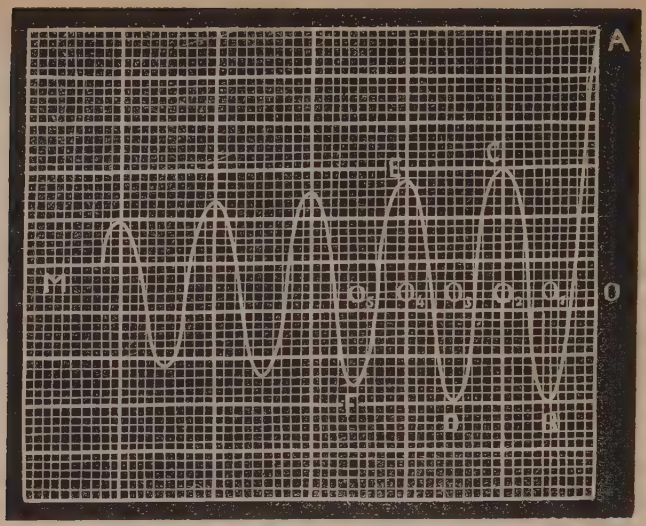
§ 14.

Fortsetzung. Nun stellt sich bei jeder derartigen Schwingung der Gleichgewichtszustand alsbald wieder her. Der Aenderung der Elasticität allein kann diese Erscheinung jedenfalls nicht zugeschrieben werden, weil sie auch beim Kupfer eintritt, bei welchem eine Aenderung der Elasticität nicht zu bemerken ist. Indess ist auch beim Eisen diese Elasticitätsänderung eine Folge der Reckung des Drahtes, so dass man zu dem Schlusse gelangt, es müsste die Ursache des Aufhörens des Schwingens in der Entstehung bleibender Ausdehnungen zu suchen sein. Bevor ich darauf eingehe, diesen Gedanken weiter auszuführen, will ich noch einen Versuch angeben, der diese Anschauung unterstützt und eine mathematische Behandlung der Frage möglich macht.

Ich habe nämlich am Ende des Hebelarms meines Apparats seitlich einen Stift angebracht und die Schwingungen des Hebelarmes, also des Drahtes, auf eine mit Russ belegte Glastafel graphisch dargestellt, indem ich diese vom Augenblick des Beginnes der Schwingungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig fortbewegte.

Nachstehende Figur stellt einen Theil einer dieser Curven genau dar

Bei A stand der Stift, als der Hebel unbelastet war. O ist der Punkt, in welchem der Stift stand, als der Hebelarm ausgeschwungen hatte, wenn die Glastafel zurückbewegt wurde AO entspricht der aus der Belastung berechneten Grösse $x = \frac{g}{k}$ wie zu erwarten war. Es wurde ein Draht gebraucht, der schon gestreckt war, damit die bleibende Ausdehnung durch das Schwingen klein wurde; sie stellt sich auf der Glastafel in der Länge von etwa $0{,}75^{mm}$ dar, so dass der



Stift, nachdem die Belastung vom Hebelarm abgenommen war 0,75^{mm} unter A stand. Dadurch konnte ich O M ohne merklichen Fehler horizontal ziehen.

Das Eigenthümliche an der Curve ist nun, dass:

$$O_1 B < O A$$
$$O_1 B = O_2 C$$
$$O_3 D < O_2 C$$
$$O_3 D = O_4 E$$
$$O_5 F < O_3 D \text{ u. s. w.}$$

ist. O_1 B ist also nicht so lange, als es bei vollkommener Elasticität des Drahtes sein sollte, wie überhaupt jedesmal, so oft der Stift unter die Gleichgewichtslage O M kommt, eine Verkürzung stattfindet, was bei der Bewegung über die Gleichgewichtslage M O nicht der Fall ist. Denken wir uns der Einfachheit halber das Gewicht wieder unmittelbar am Drahte wie in §. 13 befestiget

Da nun der Punkt O die Lage hat, welche der elastischen Ausdehnung entspricht, wenn man das Gewicht langsam herablässt, dagegen O B < O A ist, so wird das nur erklärlich, wenn man annimmt, dass während der Ausdehnung über O hinaus zu der der Bewegung entgegenwirkenden Spannung noch eine neue in demselben Sinne wirkende Kraft hinzukömmt. Betrachten wir das Gewicht als eine bloss träge Masse m, so greifen in deren Schwerpunkt zwei Kräfte ein, nämlich die Kraft $Q = m g$ und die Spannkraft $P = m k x$, wenn

wir die frühere Bezeichnung beibehalten. Da der Schwerpunkt dieselbe Bewegung macht wie das untere Ende des Drahtes, so wollen wir die Bewegung dieses Punktes betrachten. In seiner Ruhelage sei der Schwerpunkt in A und während der Bewegung bis O wirkt jede Kraft mit der ihr naturgemäss zukommenden natürlichen Grösse. In O hat die Masse M eine gewisse lebendige Kraft erlangt, welche den Schwerpunkt über O eine Strecke gleich O A hinausführen müsste. Da aber factisch ein Weg $O_1 B < O A$ zurückgelegt wird, so nehme ich an, dass von O ab noch eine neue im Sinne der elastischen Spannung wirkende Kraft hinzutritt, welche hervorgebracht wird durch den Widerstand, den der Draht seiner Reckung entgegensetzt; oder wir können uns vorstellen, von O_1 ab bis B sei die Beschleunigung g der Erde in zwei Theile geschieden; es werde der eine Theil φ auf Reckung verwendet, so dass der zum Schwingen verwendete Theil $\psi = g - \varphi$ wäre und die Beschleunigung φ während des Weges $O_1 B$ constant wirke. Das Letztere wird wahrscheinlich nicht genau der Fall sein, doch können wir uns unter φ einen Mittelwerth vorstellen. Auch ist es keineswegs ausgemacht, ob nicht schon während der elastischen Ausdehnung von A bis O eine Reckung entsteht. Doch zwingt die Gestalt der Curve zu einer solchen Annahme nicht; jedenfalls kommt meine Annahme der Wirklichkeit nahe. Da nun $O_1 B = O_2 C < O A$ ist, so muss ich annehmen, dass beim Aufwärtsgehen die ganze Strecke $O_1 B + O_2 C$ die Schwere vollständig zum Schwingen verwendet, d. h. nichts davon auf Reckung verbraucht wird, überhaupt eine solche nicht entsteht. Ebenso wird keine Streckung beim Abwärtsbewegen von C nach O_2, dagegen eine solche von O_3 bis D erfolgen, wesshalb auch $O_3 D < O_2 C < O_3 B$. Die Beschleunigung des auf Reckung verbrauchten Theils der Schwere wird eine andere Grösse als vorhin haben, was wir wenigstens annehmen wollen.

Von D bis E und von da bis O_4 wird keine Reckung erfolgen u. s. w.

Um nun die Richtigkeit dieser Anschauung über das Entstehen der bleibenden Ausdehnungen auf mathematischem Wege noch weiter zu bekräftigen, lege ich folgendes zu Grunde: Würden bleibende Verlängerungen nicht entstehen, wäre also der Draht vollkommen elastisch, so müsste, vom Luftwiderstande abgesehen, nach obigem Calcul das Schwingen fortdauern. Die Arbeit, welche das Aufhören der Schwingungen bewirkt, wird vom Drahte in Folge des Streckens verrichtet. Nach Beendigung des Schwingens steht der Schwerpunkt in O. Wäre beim ersten Herabgehen des Gewichts, wenn dieses in O angekom-

men, dessen lebendige Kraft $= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{Q v^2}{2g}$ auf irgend eine Art plötzlich vernichtet worden, so wäre das Schwingen nicht erfolgt und der Zustand derselbe wie der Endzustand nach dem Schwingen. Hiezu wäre die Arbeit

$$W = \int_{x=0}^{x=s_1} (mg - mkx)\, dx = \frac{Q}{g} \int_{x=0}^{x=s_1} (g - \frac{g}{s_1} x)\, dx = \frac{1}{2} Q s_1$$

nöthig.

Diese Arbeit wird also vom Drahte während der ganzen Schwingungsbewegung geleistet.

Ist also meine Hypothese über den Vorgang bei diesem Schwingen richtig, so muss die gesammte bei allen Schwingungen verrichtete Arbeit $= \frac{1}{2} Q s_1$ *sein.*

Wir haben somit bei jedem Hin- und Hergang verschiedene Perioden zu unterscheiden, werden diese getrennt von einander behandelt, wodurch der etwas weitläufige Calcul durchsichtig wird.

1. Periode. Bewegung von A bis O_1.

Ist v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und x der vom Ausgangspunkt der Bewegung gerechnete zurückgelegte Weg, so haben wir:

$$g - kx = v \frac{dv}{dx}$$

$$\int v\, dv = g \int dx - k \int x\, dx$$

und

$$v = \pm \sqrt{(2g - kx)\, x}$$

Für $x = \frac{g}{k} = s_1$ ist v ein Maximum.

$$V = \frac{g}{\sqrt{k}} = \sqrt{g s_1}$$

2. Periode, Bewegung von O_1 bis B.

Ist φ die Beschleunigung des Theils der Anziehungskraft der Erde, welcher auf Reckung verwendet wird, so ist, wenn z der Weg von O an gerechnet und die auf Schwingen verbrauchte Beschleunigung $\psi = g - \varphi$

$$(g - \varphi) - k\,(s_1 + z) = v \frac{dv}{dz} \text{ oder da } s_1 = \frac{g}{k}$$

$$\int v\, dv = -\varphi \int dz - k \int z\, dz + C$$

Und da für $z = o$ das $v = \frac{g}{\sqrt{k}}$, so ist $C = \frac{g^2}{2k}$ und

$$v = \sqrt{\frac{1}{k}\left[g^2 - (2\varphi + kz)\, kz\right]}$$

Es wird also $v = o$ wenn:

$$g^2 - (2\varphi + kz)\, kz = o$$

oder:

$$z = \frac{\sqrt{g^2 + \varphi^2} - \varphi}{k} = z_1$$

wo offenbar $z_1 < \frac{g}{k} < s_1$ ist. Hieraus ergibt sich:

$$\varphi = \frac{g^2 - k^2 z_1^2}{2 k z_1}$$

3. Periode, Bewegung aufwärts von B bis C.

$$g - kx = v \frac{dv}{dx}$$

$$\int v\, dv = g \int dx - k \int x\, dx + C$$

Ist $x = s_1 + z_1 = a_1$ so ist $v = o$ daher $C = \frac{1}{2} k a_1^2 - g a_1$ und folglich:

$$v^2 = 2g\,(x - a_1) - k\,(x^2 - a_1^2)$$

v ist ein Maximum $V = -z_1 \sqrt{k}$ wenn $x = \frac{g}{k} = s_1$

Es wird $v = o$ für $x = a_1$ und $x = 2\frac{g}{k} - a_1 = s_1 - z_1 = \xi_1$ was mit der Gestalt der Curve vollständig übereinstimmt.

4. Periode, Bewegung abwärts von C bis O_2.

$$g - kx = v \frac{dv}{dx}$$

$$\int v\, dv = \int (g - kx)\, dx + C.$$

Für $x = \xi_1$ ist $v = o$ daher $C = \frac{1}{2} k \xi_1^2 - g \xi_1$ und

$$v^2 = 2g\,(x - \xi_1) - k\,(x^2 - \xi_1^2)$$

v ist ein Maximum $V = z_1 \sqrt{k}$ für $x = \frac{g}{k} = s_1$

5. Periode, Bewegung von O_2 bis D.

Beträgt hier der auf Reckung verwendete Theil von g die Grösse φ_1, so haben wir für die elastische Schwingung:

$$(g - \varphi_1) - k\,(s_1 + z) = v\frac{dv}{dz}$$

wobei z die bekannte Bedeutung hat.

$$\int v\,dv = -\varphi_1 \int dz - \frac{1}{2} k \int z^2\,dz + C$$

Für $z = o$ ist nach Obigem $v = V = z_1 \sqrt{k}$ daher:

$$C = \frac{k\,z_1^2}{2} \quad \text{also:}$$

$$v^2 = k\,(z_1^2 - z^2) - 2\varphi_1 z$$

Es wird $v = o$ wenn:

$$k\,(z_1^2 - z^2) - 2\varphi_1 z = o \text{ oder:}$$

$$z = \frac{\sqrt{\varphi_1^2 + k^2 z_1^2} - \varphi_1}{k} = z_2 \text{ wird, woraus}$$

$$\varphi_1 = \frac{k\,(z_1^2 - z_2^2)}{2 z_2} \text{ sich ergibt.}$$

6. Periode, Bewegung aufwärts von D bis E.

$$g - kx = v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\int v\,dv = \int (g - kx)\,dx + C$$

Für $x = s_1 + z_2 = a_2$ ist $v = o$ daher $C = \frac{1}{2} k a_2^2 - g a_2$

und $$v^2 = 2g\,(x - a_2) - k\,(x^2 - a_2^2)$$

v wird ein Maximum für $x = \frac{g}{k} = s_1$ und zwar ist das Maximum

$$V = -\,z_2 \sqrt{k}$$

Ferner ist $v = o$ wenn entweder $x = a_2$ oder

$$2g - k\,(x + a_2) = o \quad \text{also}$$

$$x = \frac{g}{k} - z_2 = s_1 - z_2 = \xi_2$$

7. Periode, Bewegung von E bis O_4.

$$g - kx = v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\int v\,dv = \int (g - kx)\,dx + C.$$

Es ist für $x = \xi_2$ das $v = o$; daher $C = \frac{1}{2} k\xi_2^2 - g\xi_2$ und

$$v^2 = 2g\,(x - \xi_2) - k\,(x^2 - \xi_2^2)$$

Es ist ferner wieder v ein Maximum V wenn $x = \frac{g}{k} = s_1$ und zwar ist

$$V = z_2 \sqrt{k}$$

8. Periode, Bewegung abwärts von O_4 bis F.

Ist abermals φ_2 der auf Streckung verwendete Theil von g, so ist

$$(g - \varphi_2) - k(s_1 + z) = v\frac{dv}{dz}$$

$$\int v\,dv = -\varphi_2 \int dz - k \int z\,dz + C.$$

Und da für $z = o$ die Grösse $v = V = z_2 \sqrt{k}$, so ist:

$$v^2 = k(z_2^2 - z^2) - 2\,\varphi_2\,z$$

v wird o wenn:

$$k\,(z_2^2 - z^2) - 2\,\varphi_2\,z = o \quad \text{also:}$$

$$z = \frac{\sqrt{\varphi_2^2 + k^2 z_2^2} - \varphi_2}{k} = z_3 \text{ ist.}$$

Hieraus berechnet sich:

$$\varphi_2 = \frac{k\,(z_2^2 - z_3^2)}{2z_3}$$

Stellen wir nun die bisher gewonnenen Hauptgleichungen zusammen,

$$z_1 = \frac{\sqrt{g^2 + \varphi^2} - \varphi}{k}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{(kz_1)^2 + \varphi_1^2} - \varphi_1}{k}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{(kz_2)^2 + \varphi_2^2} - \varphi_2}{k} \quad \text{und analog:}$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{(kz_3)^2 + \varphi_3^2} - \varphi_3}{k} \quad \text{u. s. w.}$$

. . . . . .

$$z_n = \frac{\sqrt{(kz_{n-1})^2 + \varphi_{n-1}^2} - \varphi_{n-1}}{k}$$

Ferner: $V = \frac{g}{\sqrt{k}}$

$$V_1 = \mp z_1 \sqrt{k}$$
$$V_2 = \mp z_2 \sqrt{k}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$V_n = \mp z_n \sqrt{k}$$

Endlich:
$$\varphi = \frac{g^2 - (k z_1)^2}{2 k z_1}$$
$$\varphi_1 = \frac{k(z_1^2 - z_2^2)}{2 z_2}$$
$$\varphi_2 = \frac{k(z_2^2 - z_3^2)}{2 z_3} \quad \text{und analog:}$$
$$\varphi_3 = \frac{k(z_3^2 - z_4^2)}{2 z_4}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_n = \frac{k(z_n^2 - z_{n+1}^2)}{2 z_{n+1}}$$

Sieht man von dem Werthe für φ ab, so erhält man aus den diesen folgenden Werthen

$$\frac{2 \varphi_1 z_2}{k} = z_1^2 - z_2^2$$
$$\frac{2 \varphi_2 z_3}{k} = z_2^2 - z_3^2$$
$$\frac{2 \varphi_3 z_4}{k} = z_3^2 - z_4^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{2 \varphi_n z_{n+1}}{k} = z_n^2 - z_{n+1}^2$$

und durch Addition dieser Gleichungen:

$$\frac{2}{k}\left[\varphi_1 z_2 + \varphi_2 z_3 + \varphi_3 z_4 + \ldots + \varphi_n z_{n+1}\right] = z_1^2 - z_{n+1}^2$$

oder:
$$\Sigma(\varphi_n z_{n+1}) = \frac{1}{2} k (z_1^2 - z_{n+1}^2)$$

Ist nun am Drahte eine Masse m vom Gewichte Q angehängt, so ist $m = \frac{Q}{g}$ und wenn wir die der Beschleunigung φ_n entsprechende bewegende Kraft mit P_n bezeichnen,

$$P_n = m \varphi_n \quad \text{also}$$
$$\varphi_n = \frac{P_n}{Q} g$$

und:
$$\varphi_n z_{n+1} = \frac{P_n}{Q} g \cdot z_{n+1}$$

daher: $$\Sigma\,(\varphi_n z_{n+1}) = \frac{g}{Q}\,\Sigma\,(P_n z_{n+1})$$

folglich: $$\frac{g}{Q}\,\Sigma(P_n z_{n+1}) = \frac{1}{2}\,k\,(z_1^2 - z_{n+1}^2)$$

Bezüglich der ersten Schwingung ist:

$$P = \frac{Q}{g}\,\varphi \quad \text{oder}$$

$$\varphi = \frac{P}{Q}\,g$$

$$\varphi z_1 = \frac{P}{Q}\,g \cdot z_1$$

folglich: $$\frac{g}{Q}\,P z_1 = \frac{g^2 - (k z_1)^2}{2k}$$

Addirt man diese Gleichung zur obigen, so ergibt sich:

$$\frac{g}{Q}\left[P z_1 + \Sigma(P_n z_{n+1})\right] = \frac{1}{2}k\,(z_1^2 - z_{n+1}^2) + \frac{g^2 - k^2 z_1^2}{2k} = \frac{g^2}{2k} - \frac{1}{2}\,k\,z_{n+1}^2$$

und daraus:

$$P z_1 + \Sigma\,(P_n z_{n+1}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{g}{k}\,Q - \frac{1}{2}k z_{n+1}^2 \cdot \frac{Q}{g}$$

Nun ist die linke Seite der Gleichung die Summe der Elementararbeiten, welche beim Schwingen auf Reckung verwendet werden; nennen wir die Gesammtarbeit A, so ist:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{k}\,Q - \frac{1}{2}\,k z_{n+1}^2 \cdot \frac{Q}{g}$$

Lässt man vollkommen ausschwingen, so wird $z_{n+1} = 0$ also

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{k} \cdot Q = \frac{1}{2}\,Q s_1$$

Dieses ist die gesammte Arbeit, welche beim ganzen Schwingungsakte auf Streckung verwendet wird, wodurch die Richtigkeit meiner Anschauung sehr wahrscheinlich werden dürfte.

Die elastische Verlängerung s_1 ist, wenn l die Länge, S der Querschnitt und E der Elasticitätsmodul des Drahtes ist $= \frac{l}{E} \cdot \frac{Q}{S}$; und da in unserm Falle $l = 1$ und $S = 1$ vorausgesetzt, die auf die Reckung eines Drahtes von der Querschnitts- und Längeneinheit gebrauchte Arbeit:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{E}$$

wodurch die zum Aufheben der Schwingung nöthige Arbeit durch den Elasticitätsmodul ausgedrückt ist. Sie ist somit gerade

proportional dem Quadrate der Belastung und verkehrt proportional dem Elasticitätsmodul.

Endlich sei noch bemerkt, dass man die Arbeit, welche diesen Schwingungszustand aufhebt, noch durch andere Grössen ausdrücken kann. Ist α der Ausdehnungscoëfficient durch die Wärme, w die specifische Wärme und s das specifische Gewicht des Drahtes und a das Atomengewicht, so ist nach der schon erwähnten Arbeit von *H. Vogel*

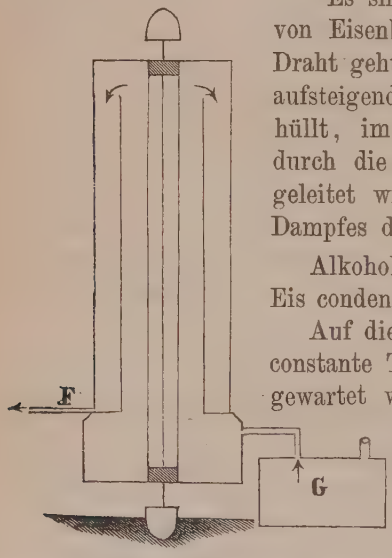
$$A = \frac{1}{2C} \cdot \frac{\alpha}{ws} \cdot Q^2 = \frac{1}{2C_1} \cdot \frac{\alpha a}{s} \cdot Q^2$$

wo C und C_1 Constante bedeuten.

§. 15.

Elasticität bei verschiedenen Temperaturen. Endlich habe ich die Elasticität des Eisendrahtes bei verschiedenen Temperaturen untersucht. Es wurde bei diesen Versuchen derselbe Apparat angewendet.

Die Erzeugung constanter Temperaturen wurde mittelst eines Dampfmantels bewerkstelliget. Diesen stellt nebenstehende Figur im Durchschnitte dar.



Es sind drei ineinanderstehende Cylinder von Eisenblech, durch deren innersten der Draht geht, während der aus dem Gefässe G aufsteigende Dampf den Cylindermantel umhüllt, im äusseren Raume herabgeht und durch die Röhre F aus dem Arbeitszimmer geleitet wird, wie überhaupt den Weg des Dampfes die Pfeile anzeigen.

Alkohol- und Aetherdämpfe wurden durch Eis condensirt.

Auf diese Weise gelang es mir, vollständig constante Temperaturen, wenn genügend lang gewartet wurde, herzustellen, von welcher Beständigkeit ich mich am sichersten durch die Spiegelablesung überzeugte.

Von dem Drahte ragten an beiden Enden des Mantels etwa 3^{cm} hervor. Zum hermetischen Abschlusse der innersten Röhre war Kork und Wolle angewendet. Ein empfindliches Thermometer ragte in den innersten Raum, welches die

Temperatur des Drahtes angab. Gebraucht wurden abwechselnd Aether-, Alkohol- und Wasserdämpfe; ausserdem wurden die beiden äusseren Räume mit schmelzendem Schnee gefüllt, so dass bei fünf verschiedenen Temperaturen Versuche angestellt werden konnten; nämlich bei der des schmelzenden Schnee's, bei der gewöhnlichen Zimmertemperatur und den Temperaturen des Dampfes, des Aethers, des Alkohols und des Wassers.

Die Versuche wurden an demselben Drahte vorgenommen, der dieselbe Dicke hatte wie die bisherigen und dessen Länge 1,076^{m} betrug. Sie wurden nach der ersten Methode angestellt, indem immer die Belastung nach 5 Minuten abgenommen und die schon bekannten Ablesungen vor und nach der Belastung vorgenommen wurden.

Um sicher zu sein, dass nicht ein etwa unbekannter Einfluss die Beobachtungen nach einer Seite unrichtig mache, habe ich die Temperaturen nicht in einer bestimmten Reihenfolge erzeugt.

Jeder Beobachtung bei höheren oder niederen Temperaturen als der des Zimmers gingen Beobachtungen bei gewöhnlicher Zimmertemperatur voraus. Die in folgender Tabelle angeführten Versuche wurden in einem Zeitraume von etwa 20 Tagen angestellt. Die an demselben Tage hintereinander angestellten Versuche sind in Klammern eingeschlossen. Die Belastung betrug 18 Kgr. (stat. Moment). Die Temperaturen, welche durch denselben Dampf erzeugt wurden, wichen an verschiedenen Tagen selbstverständlich nur wenig von einander ab, wesshalb ich nur mittlere Temperaturen angebe.

Tabelle X.

Nr.	Temperatur des	ε	β	
1	Zimmers	124,8	4,7	)
2	„	125,7	0,3	)
3	Aetherdampfes	127,2	2,3	)
4	Alkoholdampfes	129,2	5,5	)
5	Wasserdampfes	133,0	2,2	)
6	Zimmers	124,5	1,7	)
7	„	124,5	0,7	)
8	Alkoholdampfes	132,1	3,0	)
9	Zimmers	123,9	0,4	)
10	Wasserdampfes	132,9	1,9	)

Nr.	Temperatur des	ε	β
11	Zimmers	125,2	2,1
12	Wasserdampfes	133,2	2,2
13	„	133,6	1,0
14	„	133,7	0,2
15	Zimmers	123,8	—
16	Alkoholdampfes	129,9	2,5
17	„	130,3	0,0
18	Zimmers	124,8	0,9
19	Aetherdampfes	126,9	2,3
20	„	127,2	1,3
21	Zimmers	124,8	2,2
22	Alkoholdampfes	130,9	2,1
23	„	130,7	1,4
24	Schnee's	128,0	3,4
25	„	128,4	0,6
26	„	127,7	1,7
27	Zimmers	128,8	2,1
28	„	128,8	0,0
29	„	129,0	1,3
30	„	128,4	2,0

Ich habe mich mit den Versuchen Nr. 24, 25, 26 nicht begnügt, sondern noch einen neuen Eisendraht von derselben Länge und Dicke eingespannt, bei der Temperatur des schmelzenden Schnee's und der Zimmertemperatur untersucht und gefunden:

Tabelle XI.

1	Schnee	128,0	6,4
2	Schnee	128,1	1,2
3	Zimmertemperatur	128,6	1,7

Ich habe vielfach die Erfahrung gemacht, dass, wenn man an einem Tag einen Draht mehrmals belastet, bis die bleibende Ver-

längerung verschwindend klein innerhalb einer gewissen Zeit wird, so bleibt am nächsten Tag, wenn man dieselbe Belastung, dieselbe Zeit wirken lässt, doch eine verhältnissmässig grosse Reckung, was darauf hindeutet, dass wahrscheinlich mit der Zeit ein Theil der Reckung bei unbelastetem Drahte verschwindet. Dieser Umstand bringt sicher die Störungen in der Reihe β hervor; doch glaube ich, ist aus dieser Reihe zu entnehmen, dass durch die Wärme die Cohäsion in demselben Sinne wie die Elasticität geändert wird. Nebenbei sei bemerkt, dass die Zahlen dieser Reihe bei den Versuchen Nr. 1 bis 5 beinahe so zunehmen wie die Temperaturen.

Ich habe nun, um in Bezug auf bleibende Verlängerung ein entscheidendes Resultat zu erhalten, einen neuen Eisendraht von der gleichen Länge und Dicke wie der in Tabelle II. eingespannt und ebenfalls mit 28,5 Kgr. eine Viertelstunde belastet. Die Beobachtungen ergaben:

Tabelle XII.

Nr.	Temperatur des	ε	β	
1	Wasserdampfes	220,6	23,3	Mittel = 221,2
2	„	221,8	2,5	
3	Zimmers	207,7	7,1	Mittel = 207,9
4	„	208,1	1,2	

Vergleicht man die Zahlen mit jener Tabelle II., so ist der Einfluss der Temperatur auf die bleibenden Verlängerungen, resp. Cohäsion in die Augen springend und der Versuch um so entscheidender, als die elastischen Ausdehnungen bei gewöhnlicher Temperatur übereinstimmen.

Was die Elasticität bei verschiedenen Temperaturen betrifft, so sind die Mittelwerthe der elastischen Ausdehnungen bei den beigesetzten mittleren Temperaturen in folgender Tabelle angegeben. Die Zimmertemperaturen waren bei diesen Versuchen um höchstens 2° C. verschieden, so dass ich einen Mittelwerth für diese Versuche annehmen darf. Die Zahlen dieser Tabelle beziehen sich auf die Tabelle X.

Tabelle XII.

Nr.		Temperatur Mittel in C.°	Elastische Ausdehnung
1	Schnee	0	128,0
2	Zimmerluft	10 – 12	124,6
3	Aetherdampf	34—35	127,1
4	Alkoholdampf	76—78	130,5
5	Wasserdampf	98—99	133,3

Die Zahlen dieser Tabelle weisen ein Maximum der Elasticität bei gewöhnlicher Temperatur aus, und stimmt dieses Resultat somit mit dem der *Wertheim*'schen Versuche [1]) überein, welche sich ebenfalls auf den Einfluss der Temperatur auf den longitudinalen Elasticitätsmodul beziehen. Auch insoferne ist eine Uebereinstimmung vorhanden, als der Einfluss der Kälte nicht vorübergehend ist. [1])

Die Herren *F. Kohlrausch* [2]) und *E. Loomis* fanden, dass der Torsionsmodul des Eisens wie der der anderen Metalle ein solches Maximum nicht zeigt.

Herr *Kohlrausch* bemerkt nun über die Abweichungen seines Resultats von dem *Wertheim's* (Seite 499) wörtlich:

„Wenn also nicht entweder verschiedene Eisensorten ein ganz verschiedenes Verhalten zeigen sollten, oder der longitudinale Elasticitätsmodul eine ganz andere Aenderung durch die Temperatur erfährt, als der der Torsion, so sind diese Anomalien wohl auf die *Wertheim*'sche Messungsmethode zurückzuführen." Herr *Kohlrausch* meint, es seien diese geringen Längen, um die es sich hier handelt, nicht genau genug messbar, wozu noch der missliche Umstand tritt, dass *Wertheim* die Temperatur nicht genau constant erhalten konnte. Bei meiner Art der Messung, halte ich dafür, fallen diese Missstände weg. Auch habe ich absichtlich in Tabelle X die Erkaltung zuletzt

[1]) *Poggendorff's* Annalen etc. Ergänzungs-Band II, (Seite 61; ferner Seite 54).

[2]) *Poggendorff's* Annalen etc. Band CXLI.

vorgenommen, da man bei einer Verminderung der elastischen Ausdehnung in diesem Falle vermuthen könnte, sie rühre vom Einflusse der Streckung auf die Elasticität her; nun tritt aber trotzdem eine Vergrösserung der elastischen Ausdehnung ein.

Da nun kaum anzunehmen ist, dass der Grund dieser Abweichungen in der Eisensorte liegt, indem die *Wertheim'schen* Versuche mit chemisch reinem, die meinigen aber nur mit im Handel vorkommenden Eisendrähten bester Sorte angestellt wurden; will man ferner den *Wertheim'schen* und meinen Versuchen zusammen Beweiskraft zugestehen: so wird es höchst wahrscheinlich, *dass der longitudinale Elasticitätsmodul des Eisens durch die Wärme eine andere Aenderung erfährt, als der der Torsion.*